
LÖSUNGEN ZU
KONRAD KÖNIGSBERGER: ANALYSIS I

— KAPITEL 9 —

TIM KOPISCHKE
NOVEMBER 2020

Aufgabe 1 : ☒	Aufgabe 9 : ☐	Aufgabe 18 : ☐
Aufgabe 2 : ☒	Aufgabe 10 : ☐	Aufgabe 19 : ☐
Aufgabe 3 : ☐	Aufgabe 11 : ☐	Aufgabe 20 : ☐
Aufgabe 4 : ☐	Aufgabe 12 : ☐	Aufgabe 21 : ☐
Aufgabe 5 : ☒	Aufgabe 13 : ☐	Aufgabe 22 : ☐
Aufgabe 6 : ☒	Aufgabe 14 : ☐	Aufgabe 23 : ☐
Aufgabe 7 : ☒	Aufgabe 15 : ☐	Aufgabe 24 : ☐
Aufgabe 8 : ☐	Aufgabe 16 : ☒	
	Aufgabe 17 : ☒	

Aufgabe 1

Für $x \neq 0$ ist f als Produkt differenzierbarer Funktionen differenzierbar mit

$$\frac{df}{dx} = a|x|^{a-1} \sin\left(\frac{1}{x}\right) - |x|^a \cos\left(\frac{1}{x}\right) \frac{1}{x^2} \quad (1)$$

Für $x = 0$ gilt $f(x) = 0$ und damit

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|^a \sin\left(\frac{1}{x}\right) - 0}{x - 0} = \frac{|x|^a}{x} \sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad (2)$$

Es gilt die Abschätzung

$$-|x|^{a-1} \leq \frac{|x|^a}{x} \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq |x|^{a-1} \quad (3)$$

und für $a > 1$ und $x \rightarrow 0$ kann das Einschlusslemma angewendet werden mit

$$0 \leq \frac{|x|^a}{x} \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 0 \quad (4)$$

mit dem Ergebnis $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|^a}{x} \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$.

□

Aufgabe 2

Der Beweis wird über Induktion geführt.

Induktionsanfang. $n = 1$. $(fg)^{(1)} = (fg)' = f'g + fg'$ nach der Produktregel.

Induktionsschluss. $n \rightarrow n + 1$.

$$\begin{aligned}
(fg)^{(n+1)} &= (f(g)^{(n)})' \\
&= \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)} \right)' \\
&= \frac{d}{dx} \left(f^{(n)} g + \dots + f g^{(n)} \right) \\
&= f^{(n+1)} g + f^{(n)} g^{(1)} + \dots + f^{(1)} g^{(n)} + f g^{(n+1)} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)}
\end{aligned}$$

Wegen $\frac{d^k}{dx^k} x^3 = 0$ für $k > 3$ gilt

$$(x^3 e^x)^{(1999)} = x^3 e^x + \binom{1999}{1} 3x^2 e^x + 6 \binom{1999}{2} x e^x + \binom{1999}{3} 6e^x \quad (5)$$

□

Aufgabe 5

Die angegebene Funktion kann auch geschrieben werden als

$$f(x) = x(1 + 2x \sin(\frac{1}{x})) = x + 2x^2 \sin(\frac{1}{x}) = x + 2g(x) \quad (6)$$

mit

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) := \begin{cases} 0 & x = 0 \\ x^2 \sin(\frac{1}{x}) & x \neq 0 \end{cases} \quad (7)$$

Die Differenzierbarkeit von g auf $\mathbb{R}$ wurde bereits auf Seite 155 gezeigt. Damit ist auch f als additive Verknüpfung auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbarer Funktionen auf $\mathbb{R}$ differenzierbar.

Es ist

$$f'(0) = 1 + 2g'(0) = 1 > 0 \quad (8)$$

□

Aufgabe 6

Aus $f' \geq g'$ folgt für beliebiges $y \in (a, b]$, dass

$$\frac{f(y) - f(a)}{y - a} \geq \frac{g(y) - g(a)}{y - a} \implies f(y) - g(y) \geq f(a) - g(a) \geq 0 \quad (9)$$

und damit $f \geq g$. Das Ganze verläuft analog im Falle $f' > g'$. Bezüglich der Anwendungsfälle ist $\log(1) = 0 \geq 1 - \frac{1}{1} = 0$ und $\frac{d}{dx} \log(x) = \frac{1}{x} > \frac{d}{dx} (1 - \frac{1}{x}) = \frac{1}{x^2}$. Die andere Ungleichung beweist man analog.

□

Aufgabe 7

Zur Lösung der Aufgabe gehen wir vor wie auf Seite 147. Wir betrachten die monotone Transformation $f(x) = \log((1 + \frac{1}{x})^{x+a}) = (x+a) \log(1 + \frac{1}{x})$. Dann ist

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \log(1 + \frac{1}{x}) + (x+a) \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} \cdot \frac{-1}{x^2} \\
&= \log(1 + \frac{1}{x}) - \frac{x+a}{x^2 + x} \\
&= \log(1 + \frac{1}{x}) - \frac{1 + \frac{a}{x}}{x+1}
\end{aligned}$$

Sei nun $l := \frac{1}{x}$ mit $g(l) = g(\frac{1}{x}) = f'(x)$ und

$$g(l) = \log(1+l) - \frac{1+al}{\frac{1}{l}+1} = \log(1+l) - \frac{1+al}{1+l} l = \log(1+l) - \frac{l+al^2}{1+l} \quad (10)$$

Nun ist $g(0) = 0$ und

$$\begin{aligned}
g'(l) &= \frac{1}{1+l} - ((1+2al) \cdot \frac{1}{1+l} - (l+al^2) \cdot \frac{1}{(1+l)^2}) \\
&= \frac{1}{1+l} - \left(\frac{(1+2al)(1+l) - (l+al^2)}{(1+l)^2} \right) \\
&= \frac{(1+l)^2 - (1+2al)(1+l) + (l+al^2)}{(1+l)^2} \\
&= \frac{1+2l+l^2 - 1-l-2al-2al^2+l+al^2}{(1+l)^2} \\
&= \frac{l^2+al^2-2al^2+2l-2al}{(1+l)^2} \\
&= \frac{l^2-al^2+2l-2al}{(1+l)^2} \\
&= \frac{l^2(1-a)+2l(1-a)}{(1+l)^2}
\end{aligned}$$

Dann gilt aber klarerweise $g'(l) < 0 \iff a > 1$ und $g'(l) > 0 \iff a \leq 0$ für $l \in [0, \infty)$.

Für $a = 1$ stellen wir eine gesonderte Betrachtung an. Betrachte hierfür die Ausgangsfunktion

$$h(x) := \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1} = e^{x \log(1+\frac{1}{x})} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^a \quad (11)$$

Dann ist für $a = 1$

$$\begin{aligned}
h'_a(x) &= e^{x \log(1+\frac{1}{x})} \left(\log\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} \right) \left(1 + \frac{1}{x}\right) + e^{x \log(1+\frac{1}{x})} \frac{-1}{x^2} \\
&= e^{x \log(1+\frac{1}{x})} \left(\log\left(1 + \frac{1}{x}\right) \left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) \\
&< 0 \text{ für } x > 0
\end{aligned}$$

□

Aufgabe 16

Die zu zeigende Ungleichung ist wegen $x > 0$ äquivalent zu

$$1 < \frac{\pi \sin(x)}{2x} \quad (12)$$

Definiere nun $f : (0, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{\pi \sin(x)}{2x}$. Dann haben wir aufgrund der L'Hospital'schen Regel den Grenzwert

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} f(\xi) = \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\pi \sin(\xi)}{2\xi} = \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\pi \cos(\xi)}{2 \cdot 1} = \frac{\pi}{2} > 1 \quad (13)$$

Nun gilt $\tan(x) > x$ für $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, weil $g(0) \geq 0$ und $g' > 0$ für $g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \tan(x) - x$ (vgl. Aufgabe 6). Dann ist aber

$$x < \tan(x) \iff \frac{x^2}{x} < \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \iff \frac{\cos(x)}{x} < \frac{\sin(x)}{x^2} \iff \frac{\pi}{2} \left(\frac{\cos(x)}{2} - \frac{\sin(x)}{2} \right) < 0 \iff f'(x) < 0 \quad (14)$$

für $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. Also ist f streng monoton fallend auf $(0, \frac{\pi}{2})$ mit $\lim_{\xi \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\pi \sin(\xi)}{2\xi} = 1$. In der Konsequenz muss dann aber $f((0, \frac{\pi}{2})) \subseteq (1, \frac{\pi}{2})$ und damit $f(x) > 1$ für $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. Das ist die Behauptung.

□

Aufgabe 17

" $\Leftarrow$ " : Sei zuerst $f(x) \geq f(a) + f'(a)(x - a)$ für alle $a \in I$ mit $x \in I$. Dann folgt, dass $f'(a) \leq \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ für $x > a$ und $f'(a) \geq \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ für $x < a$. Also gilt genau die Bedingung aus dem Beweis des Konvexitätskriteriums auf Seite 158. Damit ist f konvex.

" $\Rightarrow$ " : Sei nun f konvex. Hier unterscheiden wir danach, ob $x > a$ oder $x < a$. Für $x = a$ gilt die Aussage offensichtlich bereits. Sei also $x > a$. Dann wissen wir aus dem Beweis des Konvexitätskriteriums von Seite 158, dass dann

$$f'(a) \leq \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \implies f(x) \geq f(a) + f'(a)(x - a) \quad (15)$$

Sei nun $x < a$. Dann entnehmen wir der gleichen Stelle, dass

$$\frac{f(a) - f(x)}{a - x} \leq f'(a) \implies f(a) - f(x) \leq f'(a)(a - x) \implies f(x) - f(a) \geq f'(a)(x - a) \implies f(x) \geq f(a) + f'(a)(x - a)$$

und damit erhalten wir insgesamt die Behauptung.

□